Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1
Šablona: **Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT**

Název: **Mechanika, pružnost pevnost**

Téma: **Vzpěr, mezní stav stability, pevnostní podmínky pro tlak, nepružný a pružný vzpěr**
Autor: **Ing. Jaroslav Svoboda**

Číslo: **VY_32_INOVACE_11–17**

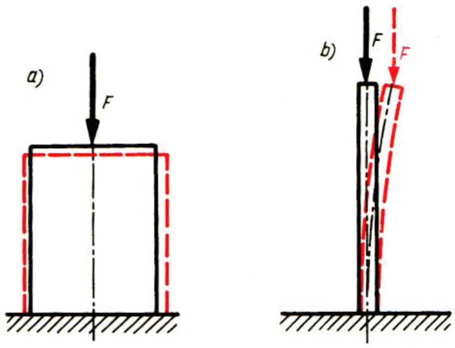
Anotace: **Definice namáhání vzpěrem, oblast pružného vzpěru, oblast nepružného vzpěru**
Určeno pro druhý ročník strojírenství 23-41-M/01.
Vytvořeno listopad 2013

1. Základní pojmy

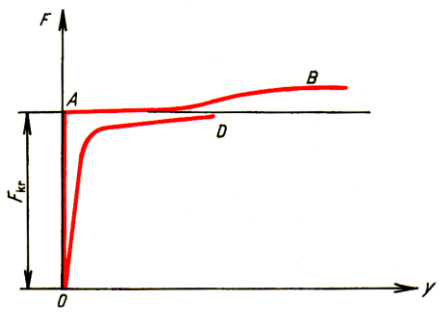
Veškeré stavy, které jsme dosud zkoumali, byla deformace v mezích platnosti Hookeova zákona. Přitom však šlo o stabilní rovnovážný stav, ať se jednalo o strojní součást nebo celou konstrukci.
V praxi se však vyskytují také případy s labilním rovnovážným stavem. Je-li těleso nemá smysl řešit ho z hlediska pevnostního, protože těleso nesetrvává v poloze, pro kterou jsme je řešili. Těleso se může porušit nikoli proto, že jsme překročili přípustné napětí, ale pro svou labilní polohu.

2. Stabilní a labilní rovnovážný stav

U silného prutu jde při malé délce o pouhý tlak a prut se při překročení meze pevnosti v tlaku rozdrtí. U štíhlého prutu zůstává prut do určité síly přímý a je pouze stlačován ve směru podélné osy. Je ve stabilním stavu. Vychýlíme-li prut příčnou silou z jeho rovnovážné polohy, pak se po zániku této síly vrátí do původního, přímého, stavu.
Jestliže, však budeme zatěžující sílu F postupně zvětšovat až na určitou kritickou sílu F_{kr}, změní se rovnováha stabilní na v rovnováhu indiferentní, prut se může kdykoliv ohnout. Nemá tedy již rovnovážnou polohu.
Pokud nepřekročíme kritickou sílu (Eulerovu sílu) jsou v rovnováze síly vnější se silami vnitřními. Při překročení této síly nemohou vnitřní síly a momenty vyrovnat účinek vnějších sil a momentů, deformace roste teoreticky bez omezení. Křehký prut se zlomí, houževnatý ohne.



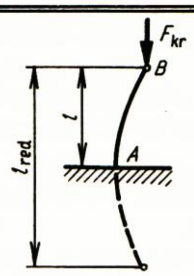
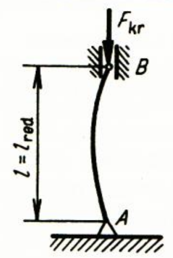
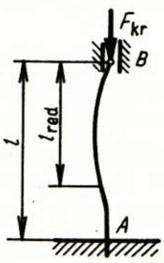
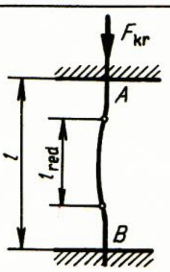
Znázorníme si závislost mezi silou a průhybem za ideálních podmínek. Ideálními podmínkami rozumíme dokonale přímý prut a sílu působící přesně v ose prutu. Pokud síla nedosáhne Fkr, je prut přímý. Za touto mezí průhyb prudce roste a je charakterizován křivkou OAB. Ve skutečnosti nebude prut dokonale rovný a zatěžující síla nebude působit přesně v ose prutu. Průhyb pak začíná již při velmi malých hodnotách síly. Při přiblížení ke kritické síle roste průhyb velmi rychle, podle křivky OD.



3. Oblast pružného vzpěru

Pokusy bylo zjištěno:

1. Budeme-li měnit pouze délku prutu, zjistíme, že kritická síla je nepřímo úměrná druhé mocnině délky prutu
2. Budeme-li měnit pouze materiál, zjistíme, že kritická síla je přímo úměrná modulu pružnosti v tahu E
3. Budeme-li měnit pouze průřez prutu, zjistíme, že kritická síla je přímo úměrná velikosti kvadratického momentu průřezu J. Plyne z toho, že tuhost EJ má při vzpěru stejnou úlohu jako při ohybu.
4. Mimoto Euler zjistil, že při vzpěru má důležitou úlohu i uložení konců prutů.

Druh vzpěru podle způsobu uložení	Způsob uložení konců prutů		Kritická síla F_{kr} vztažená na		redukovaná (vzpěrná) délka l_{red}	příklad praktického použití
	A	B	délku prutu	redukovanou (vzpěrnou) délku l_{red}		
	vetknutý	volný	$\frac{\pi^2 E J_{min}}{4l^2}$	$\frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2_{red}}$	$l_{red} = 2l$	pilota, šroub v matici zvedáku
	kloub	kloub	$\frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}$		$l_{red} = l$	ojnice (v rovině kyvu) pístní tyč
	vetknutý	kloub	$\frac{2\pi^2 E J_{min}}{l^2}$		$l_{red} \doteq \frac{l}{\sqrt{2}}$	dlouhé ložisko v bodě A (pístní tyč)
	vetknutý	vetknutý	$\frac{4\pi^2 E J_{min}}{l^2}$		$l_{red} = \frac{l}{2}$	ojnice (v rovině kolmé k rovině kyvu)

4. Eulerova rovnice a její mez platnosti

V oblasti pružného vzpěru (v oblasti platnosti Hookeova zákona) používáme pro návrhový výpočet Eulerovu rovnici

$$F_{kr} = \frac{\pi^2.E.J_{\min}}{l_{red}^2}$$

Kritická síla nezávisí na pevnosti materiálu, ale pouze na rozměrech prutu, na uložení konců prutu a na modulu pružnosti v tahu

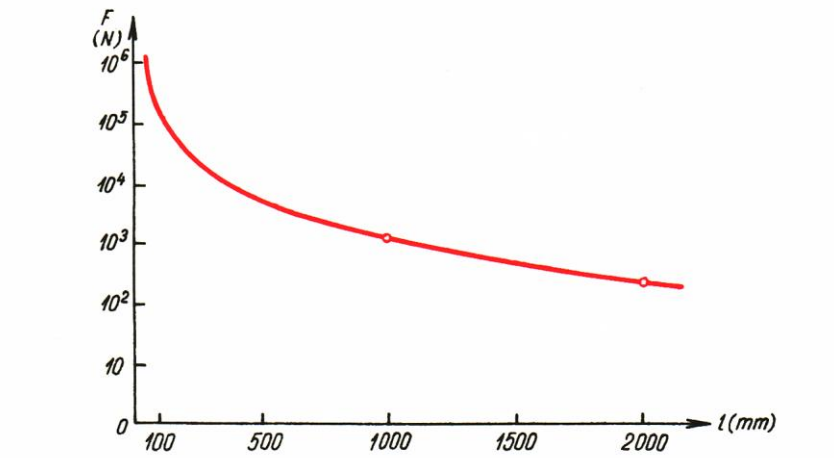
5. Mez platnosti Eulerovy rovnic

Proveďme výpočet kritické síly pro prut uchycený v kloubech o příčném průřezu a=10mm s modulem pružnosti v tahu E=2.10^{5}MPa. Napětí na mezi pevnosti v tlaku $\sigma_{Pd} = 370MPa$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2.E.J_{\min}}{l^2}$$

Sledujme, jak se mění velikost kritické síly s délkou prutu

l (mm)	F_{kr} (N)	σ_{kr} (MPa)
2000	417	4,2
1000	1670	16,7
100	16700	1670



podíl kritické síly F_{kr} a velikosti průřezu S představuje kritické napětí, které je vlastně napětím v tlaku.

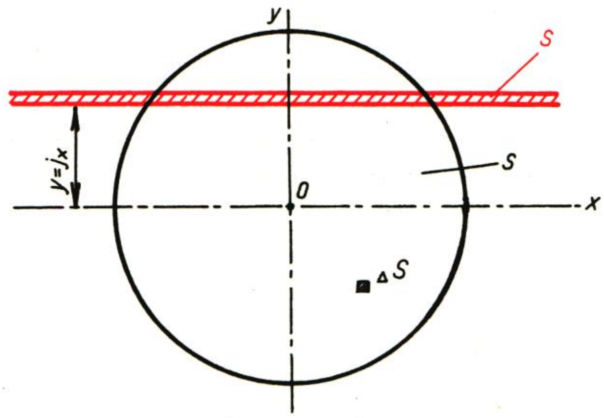
$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{S} \leq \sigma_U$$

Kritické napětí má u vzpěru stejný význam jako mez pevnosti u prostého tlaku. Při jeho překročení se konstrukce zhroutí. Proto jej nazýváme ***kritickým napětím*** nebo ***napětím na mezi vzpěrné pevnosti***. Velikost kritické síly závisí na kvadratickém momentu průřezu J. Ten se mění nejen s velikostí, ale i s tvarem průřzu. abychom dospěli pro určitý materiál k jednoznačné hodnotě upravíme vzorec do jiného tvaru.

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{S} = \frac{\pi^2.E.J_{\min}}{l^2.S}$$

přitom již víme že

$$J = \sum \Delta S.y^2$$



Nahradíme-li celou plochu pásem stejné velikosti o nekonečně malé šířce, můžeme pro všechny elementy říci, že y=konstantní. Označíme-li y=jx, můžeme psát

$$J = j_x^2 \sum \Delta S = j_x^2.S$$

Vzdálenost j_x nazýváme ***poloměrem kvadratického momentu průřezu***. Pro $J_{\min}$ je i poloměr setrvačnosti $j_{\min}$.

$$\frac{J_{\min}}{S} = j_{\min}^2 \Rightarrow j_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}$$

Pak kritické napětí

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2.E}{\frac{l}{j_{\min}}} \leq \sigma_U$$

Výraz ve jmenovateli se nazývá ***štíhlost prutu***.

$$\lambda = \frac{l}{j_{\min}}$$

pak výsledný vztah

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2.E}{\lambda^2}$$

Eulerova rovnice platí pokud

$$\lambda \geq \lambda_m$$

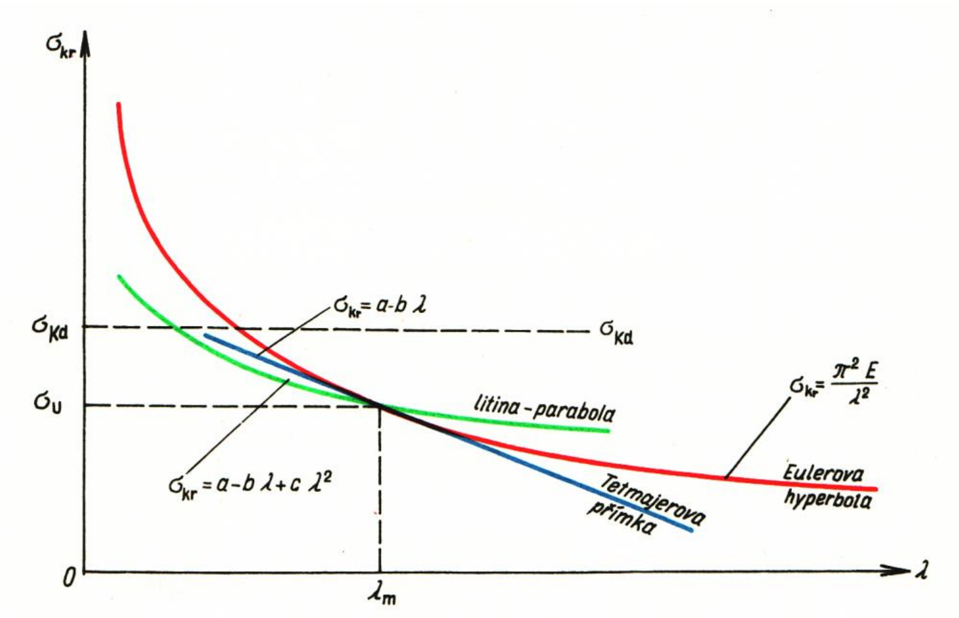
přičemž λ_m mezní štíhlost, je závislá pouze na E a σ_u, lze ji pro daný materiál určit.

materiál	λ_m
Dřevo	100
Šedá litina	80
Uhlíkové oceli	90-105
Niklové oceli	86
Pružinová ocel	60

6.Oblast nepružného vzpěru

Pro tuto oblast vzpěru bylo vytvořeno několik teorií. (Tetmajer, Jasinskij, Engesser, Kármán), které udávají závislost mezi kritickým napětím σ_{kr} a štíhlostí prutu λ . Křivky, které z těchto závislostí plynou, souhlasí s výsledky zkoušek, a souhlasí i s Eulerovou křivkou až do hodnoty mezní štíhlosti. Pak napětí roste pomaleji než u Eulerových křivek až po mez kluzu. Po té kritické napětí opět prudce roste .

Jestliže se pro pružnou oblast používá na celém světě Eulerových rovnic, pak pro nepružnou oblast se liší podle norem různých zemí. U nás se nejvíce používá rovnic Tetmajer-Jasinského, které vyplynuly z měření. Jsou tedy platné jen pro ten materiál, pro který byly pokusy provedeny.



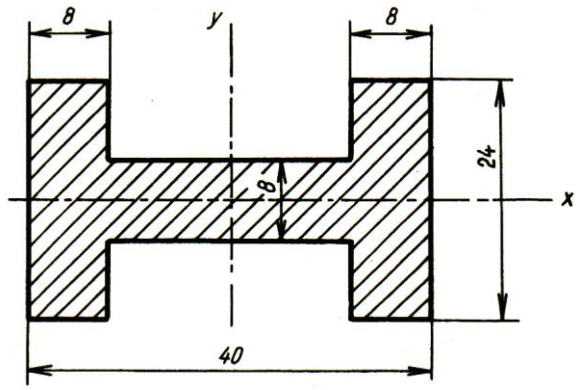
Tetmajerova přímka platí pouze od meze úměrnosti po mez kluzu. Diagram je omezen vodorovnou přímkou, která odpovídá mezi kluzu v tlaku. U materiálů s jasně vyznačenou mezí kluzu bylo pokusy zjištěno, že prut pozbývá stability, jakmile napětí dosáhne meze kluzu.

6. Vztahy pro kritická napětí podle Timošenka

Materiál		Mez pevnosti σ_{Pd} (MPa)	Mez kluzu K_{kd} (MPa)	Tetmajerova–Jasinského rovnice σ_{kr} (MPa)	Rozsah platnosti λ od	do	Kontrola na prostý tlak pro λ menší než
Litina		780	–	$776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2$	0	80	–
Ocel	11 370	370 ÷ 450	200 ÷ 250	$289 - 0{,}82\lambda$	60	100	60
	11 500	500 ÷ 620	260 ÷ 290	$335 - 0{,}62\lambda$	60	100	60
Niklová ocel		500 ÷ 750	380 ÷ 420	$589 - 3{,}82\lambda$	0	86	22
Dřevo jehličnaté – rovnoběžně s vlákny		28	–	$29{,}3 - 0{,}194\lambda$	0	100	–
Dřevo bukové a dubové – rovnoběžně s vlákny		40	–	$37{,}5 - 0{,}275\lambda$	0	100	–

7. Otázky a úkoly:

1. Kdy je prut namáhán na vzpěr.
2. Čím se zásadně liší vzpěr od všech předchozích druhů namáhání.
3. Jaké jsou teoretické předpoklady pro ideálně zatížený prut na vzpěr.
4. Co je kritická síla.
5. Vypočtěte kvadratický moment průřezu J_y a průřez S profilu



6. Určete poloměr kvadratického momentu průřezu j_y
7. Určete štíhlost prutu, má-li délku 300 a je-li uložený na obou stranách v kloubu

8. Použitá literatura

[1] Mrňák,l. Drdla,A. *Mechanika pružnost a pevnost I.* 1. Vydání SNTL, 1988
Kapitola 8. s.303
[8] Turek,I. Skala,O. Haluška,J. *Mechanika sbírka úloh*. 2.vydání Praha: SNTL, 1982. 1981.Kapitola 4 s.75