Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1
Šablona: **Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT**

Název: **Mechanika, pružnost pevnost**

Téma: **Složená namáhání, redukované namáhání**

Autor: **Ing. Jaroslav Svoboda**

Číslo: **VY_32_INOVACE_11–16**

Anotace: **Metody řešení složených namáhání při nichž se současně vyskytuje normálové i tečné napětí je možné řešit několika teoriemi**
Určeno pro druhý ročník strojírenství 23-41-M/01.
Vytvořeno listopad 2013

1. Složená namáhání

Ke složenému namáhání dojde tehdy, vyskytnou-li se současně alespoň dva druhy namáhání. Přitom může dojít k těmto kombinacím:

a)Kombinace normálových napětí

b)Kombinace tečných napětí

c)Kombinace normálových a tečných napětí

Pokud jsou napětí stejného druhu, tedy normálová nebo tečná, lze je prostě algebricky sečíst. Jsou-li napětí nesourodá, tedy normálová a tečná, nelze je sčítat algebricky ani vektorově. k jejich sloučení použijeme některou z teorií pevnosti.

2. Teorie lomu, teorie pevnosti

U složených namáhání, při kterých se vyskytuje současně normálové i tečné napětí nemůžeme tato napětí slučovat algebricky ani vektorově. Máme dva způsoby řešení:

1. *Pokusem na tenkostěnné nádobě*,

2. *Použití teorií lomu (teorií pevnosti)* Tyto teorie se vyvíjely v závislosti na používaném materiálu. Každá z nich je vhodná pro určitý druh materiálu a každá má své omezení. Všechny však zavádějí pojem *redukované napětí*, a to zpravidla normálové. σ_{red} , které v daném bodě tělesa vyvodí stejné následky jako napětí daná. Všechny teorie přitom vyjadřují redukované napětí pomocí hlavních napětí, nebo pomocí napětí daných na řešeném elementu.

3. Teorie maximálních normálových napětí

(Lamé, Clapeyron, Maxwell)

Podle této teorie dojde k poruše při složeném stavu napjatosti tehdy, jestliže $\sigma_{\max}$ dosáhne hodnoty při které nastane porušení za prostého tahu nebo tlaku.
Vztah pro redukované napětí má tvar

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2\right]} \leq \sigma_{Dt(d)}$$

Zhodnocení hypotézy a její mez platnosti:
Vztah pro redukované napětí musí platit obecně, tedy i pro případ, že $\sigma = 0$, což je příklad čistého smyku. Pak

$$\sigma_{red} = \pm\tau \leq \sigma_{Dt}$$

To znamená, že této teorie můžeme použít jen pro materiál, který má stejné dovolené napětí tahu i smyku, například pro křehké materiály, jako je litina a podobně.

4. Teorie největších poměrných deformací

(Bach, St.Venaut)

Tato teorie předpokládá, že dojde k porušení v důsledku maximálního poměrného prodloužení nebo zkrácení. Deformace tedy nesmí u dvouosé napjatosti překročit hodnotu poměrného prodloužení (zkrácení) prostého tahu (tlaku) pro napětí odpovídající dovolenému napětí.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu.\frac{\sigma_2}{E} \leq \frac{\sigma_{Dt}}{E}$$

z toho redukované napětí

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \mu.\sigma_2 \leq \sigma_{Dt}$$

Je vyjádřeno pomocí hlavních napětí. Když za hlavní napětí známý vztah a za $\mu = 0{,}3$ pro ocel dostaneme vztah pro redukované napětí

$$\sigma_{red} = 0{,}35.\sigma \pm \sqrt{\left(\sigma^2 + 4.\tau^2\right)} \leq \sigma_{Dt}$$

Pro $\sigma = 0$ dostaneme $\sigma_{red} = 1{,}3.\tau \leq \sigma_D$ a tedy součinitele vyjadřujícího závislost mezi σ_D a τ_D

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} = 1{,}3$$

Tuto teorii můžeme použít tam, kde tato závislost platí s dostatečnou přesností, to je u křehkých materiálů.

5. Teorie maximálních smykových napětí

(Mohr, Guest, Coulomb)

Ta předpokládá, že se poruší tehdy, dosáhne-li maximální tečné velikosti, při nichž se materiál poruší při prostém tahu. U jednoosé napjatosti platí $\tau_{mac} = \frac{\sigma}{2}$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2\right]} \leq \tau_D = \frac{\sigma_D}{2}$$

pak vztah pro redukované napětí

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\sigma^2 + 4.\tau^2\right)} \leq \sigma_{Dt}$$

Po dosazení za

$$\sigma = 0$$

a za

$$\sigma_{red} = 2.\tau_D$$

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\tau_D} = 2$$

Tato teorie má dvě omezení

1. Poloměr Mohrovy kružnice je $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$. Nezáleželo by tedy na velikosti σ_1 a σ_2, ale jen na jejich rozdílu, což není možné, protože σ_1 by mohlo nabýt libovolných hodnot.
2. Pro případ, že $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ co do velikosti i znaménka, přejde Mohrova kružnice pro dvojosý stav napjatosti v bod a v žádné rovině pak není tečné napětí.

Tato teorie platí s těmito omezeními pro houževnaté materiály, ale dává poněkud větší rozměry než pátá teorie.

6. Čtvrtá a pátá teorie

Obě tyto teorie vycházejí z předpokladu, že příčinou porušení je určité množství objemové hustoty deformační energie.

Čtvrtá teorie

uvažuje celkovou objemovou hustotu deformační energie složenou ze dvou částí a to

z části působící změnu tvaru

z části měnící objem

Pro dvouosou napjatost platí, že celková objemová hustota deformační energie je

$$W_c = \frac{1}{2}.\varepsilon_1.\sigma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2.\sigma_2$$

Ta však nesmí překročit objemovou hustotu deformační energie prostého tahu pro napětí odpovídající σ_{Dt}.

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1.\sigma_1 = \frac{1}{2}.\sigma_1.\frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1^2}{2.E}$$

pak

$$W_C = \frac{\sigma_1^2}{2.E} + \frac{\sigma_2^2}{2.E} = \frac{\sigma_{Dt}^2}{2.E}$$

Po úpravě

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} \leq \sigma_{Dt}$$

Pokusy bylo zjištěno, že podrobíme-li součást všestrannému tlaku, pak část energie, využitá ke změně objemu, nemá vliv na porušení materiálu, protože materiál snese vysoké tlaky.

Z tohoto předpokladu vychází pátá teorie, která předpokládá, že rozhodující pro porušení je jen ta část energie, která mění tvar tělesa. Protože tvar mohou změnit jen smyková napětí, říká se této teorii energetická teorie změny tvaru nebo ***energetická teorie smykových napětí*** (Huber, Mises, Hencky) uváděná pod zkratkou HMH.

Redukované napětí podle čtvrté teorie

Rovnice čtvrté teorie

$$W_c = \frac{1}{2}.\varepsilon_1.\sigma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2.\sigma_2 = \frac{\sigma_{Dt}^2}{2.E}$$

Dosazením za $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu.\frac{\sigma_2}{E}$ a $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu.\frac{\sigma_1}{E}$

Pak redukované napětí podle ***čtvrté teorie***

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2.\mu.\sigma_1.\sigma_2\right)} \leq \sigma_{Dt}$$

Pro ***pátou teorii*** je $\mu = 0{,}5$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\sigma^2 + 3.\tau^2\right)} \leq \sigma_{Dt}$$

Porovnání metody τmax a HMH

Vstupní hodnoty

$M_o := 100N\cdot m$

$M_k := 100N\cdot m$

$\sigma_{Do} := 10MPa$

Metoda τmax

$$d_{\tau max} := \sqrt[6]{\frac{32^2\cdot\left(M_o{}^2 + M_k{}^2\right)}{\pi^2\cdot\sigma_{Do}{}^2}}$$

$d_{\tau max} = 52.421mm$

Metoda HMH

$$d_{HMH} := \sqrt[6]{\frac{32^2\cdot M_o{}^2 + 3^2\cdot 16^2\cdot M_k{}^2}{\pi^2\cdot\sigma_{Do}{}^2}}$$

$d_{HMH} = 56.839mm$

Detailní odvození vztahů

$$\sigma_{Do} = \sqrt{(\sigma_o)^2 + 4(\tau_k)^2}$$

$$\sigma_{Do} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_k}\right)^2}$$

$$\sigma_{Do} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{\frac{\pi.d^3}{32}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{\frac{\pi.d^3}{16}}\right)^2}$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{M_o}{\frac{\pi.d^3}{32}}\right)^2 + 4.\left(\frac{M_k}{\frac{\pi.d^3}{16}}\right)^2$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{32.M_o}{\pi.d^3}\right)^2 + 4.\left(\frac{16.M_k}{\pi.d^3}\right)^2$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{32^2.M_o^2}{\pi^2.d^6}\right) + 4.\left(\frac{16^2.M_k^2}{\pi^2.d^6}\right)$$

$$\sigma_{Do}^2.\pi^2.d^6 = 32^2.M_o^2 + 4.16^2.M_k^2$$

$$d = \sqrt[6]{\frac{32^2.\left(M_o^2 + M_k^2\right)}{\pi^2.\sigma_{Do}^2}}$$

$$\sigma_{Do} = \sqrt{(\sigma_o)^2 + 3(\tau_k)^2}$$

$$\sigma_{Do} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + 3.\left(\frac{M_k}{W_k}\right)^2}$$

$$\sigma_{Do} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{\frac{\pi.d^3}{32}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{\frac{\pi.d^3}{16}}\right)^2}$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{M_o}{\frac{\pi.d^3}{32}}\right)^2 + 3.\left(\frac{M_k}{\frac{\pi.d^3}{16}}\right)^2$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{32.M_o}{\pi.d^3}\right)^2 + 3.\left(\frac{16.M_k}{\pi.d^3}\right)^2$$

$$\sigma_{Do}^2 = \left(\frac{32^2.M_o^2}{\pi^2.d^6}\right) + 3.\left(\frac{16^2.M_k^2}{\pi^2.d^6}\right)$$

$$\sigma_{Do}^2.\pi^2.d^6 = 32^2.M_o^2 + 3.16^2.M_k^2$$

$$d = \sqrt[6]{\frac{32^2.M_o^2 + 3.16^2.M_k^2}{\pi^2.\sigma_{Do}^2}}$$

7. Otázky a úkoly:

1. Proč nelze normálová a tečná napětí sčítat vektorově ani algebricky.
2. Proč zavádíme pojem redukovaného napětí.
3. Vysvětli význam redukovaného napětí.
4. Co jsou teorie lomu.
5. Jaký je princip energetické teorie HMH.
6. Definuj průřezový modul v ohybu a krutu.
7. Navrhni průměr hřídele. Materiál hřídele 1.0050. Hřídel přenáší ohybový moment 50Nm, krouticí moment 100Nm.

8. Použitá literatura

[1] Mrňák,l. Drdla,A. *Mechanika pružnost a pevnost I.* 1. Vydání SNTL, 1988
Kapitola 7.4. s.287
[8] Turek,I. Skala,O. Haluška,J. *Mechanika sbírka úloh*. 2.vydání Praha: SNTL, 1982. 1981.Kapitola 4 s.75