



Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1
Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Název: Mechanika, pružnost pevnost

Téma: Základní druhy namáhání, KRUT. Výpočet napětí, rozložení po průřezu, deformace, výpočet rozměrů

Autor: Ing. Jaroslav Svoboda

Číslo: VY_32_INOVACE_11–12

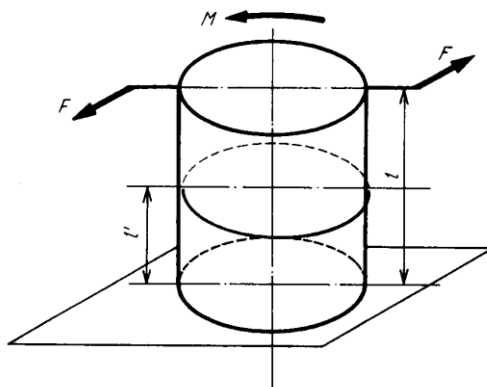
Anotace: Definice namáhání krutem, výpočty napětí a jeho rozložení po průřezu. Deformace součástí namáhaných krutem. Výpočet rozměrů součástí.

Určeno pro druhý ročník strojírenství 23-41-M/01.

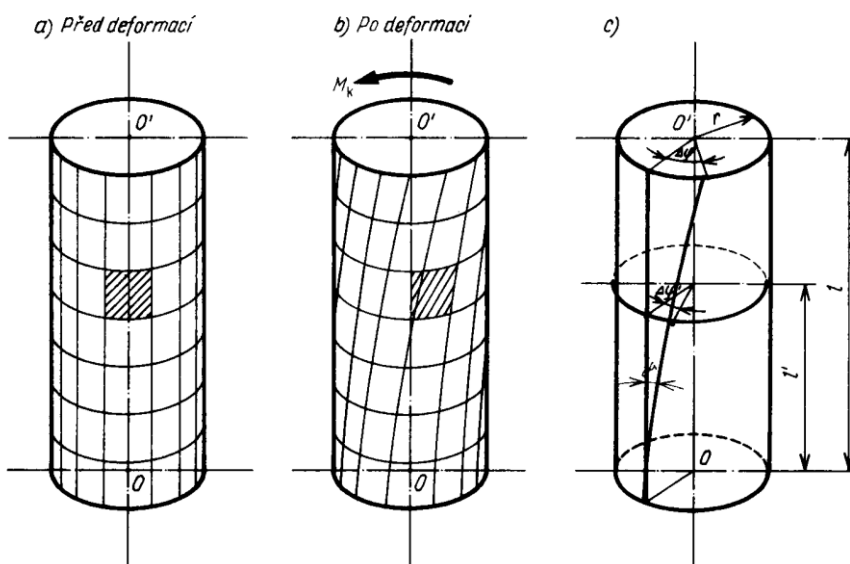
Vytvořeno červen 2013

1. Namáhání krutem

Prut je namáhán na krut tehdy a jen tehdy působí-li na něj dvojice sil, která leží v rovině kolmé k ose prutu.



Namáhejme krutem modelový nosník. Po zatížení vidíme:



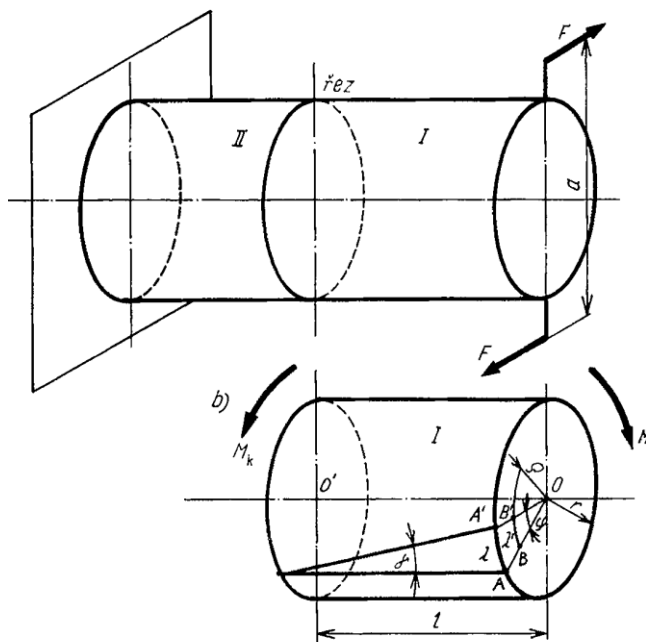
1. Osa válce zůstala přímá, nezúčastnila se deformace. Proto ji pojmenujeme jako **neutrální osu**.
2. Jednotlivé průřezy se proti sobě natáčí jako tuhé celky. Smýkají se po sobě, vzniká tedy jen tečné napětí.
3. Čtverce sítě se změnil na kosočtverce.
4. Kruhové průřezy válce zůstanou kruhové se stejným poloměrem.
5. Vzájemné vzdálenosti mezi průřezy se nemění, nezmění se tedy ani celková výška nosníku.
6. Povrchové přímky nosníku se změnil ve šroubovice s velkým stoupáním.
7. Úhly natočení příčných průřezů kolem jejich středů jsou přímo úměrné vzdálenostem průřezů od nehybně upnutého konce. Úhel natočení koncového průřezu vůči nehybnému průřezu se nazývá **celkový úhel zkroucení**.

2. Krut kruhových průřezů, odvození rovnice pro napětí

Odvození těchto vztahů je založeno na těchto předpokladech:

1. rovinné průřezy nosníku zůstávají rovinné i po deformaci. (tento předpoklad ovšem platí pouze u kruhových průřezů)
2. poloměry průřezů zůstávají při deformaci nezměněny
3. vzdálenost mezi průřezy se nemění

Pro odvození vztahů platných pro krut použijeme vetknutý kruhový nosník na konci zatížený silovou dvojicí.

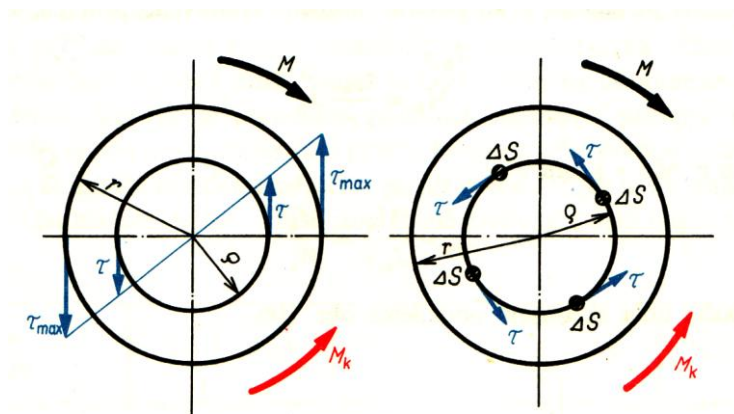


1. vedeme řez a ponecháme část 1
2. místo odstraněné části připojíme vnitřní síly a momenty vnitřních sil, které udržují část 1 v rovnováze, tedy dvojici sil o momentu M_k .
3. napíšeme podmínku rovnováhy $M=M_k$
4. přitom platí poměr

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{r\varphi}{\rho\varphi} = \frac{r}{\rho}$$

5. protože se příčné řezy po sobě posouvají, vznikají tečná napětí.
6. v mezích Hookeova zákona je poměrná deformace přímo úměrná napětí. Z toho vyplývá poznatek nutný pro odvození základní rovnice pro krut:

Tečné napětí roste přímo úměrně se vzdáleností od neutrální osy a dosahuje svého maxima na povrchu.



rozložíme průřez na elementární plošky ΔS . Elementární smyková síla na této plošce je $\Delta F = \tau \Delta S$. τ působí tečně ke kružnici o poloměru ρ .

7. tato elementární smyková síla vyvolá elementární moment vzhledem k neutrální ose a tvoří část momentu vnitřních sil.

$$\Delta M_k = \Delta F \cdot \rho = \tau \Delta S \cdot \rho$$

8. moment vnitřních sil po celém průřezu je pak

$$M_k = \sum \Delta M_k = \sum \tau \Delta S \cdot \rho$$

dosadíme-li za τ ze vztahu

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{\rho}{r} \quad \text{výraz} \quad \tau = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot \rho$$

pak

$$M_k = \sum \Delta S \cdot \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot \rho^2$$

po vytknutí konstant

$$M_k = \frac{\tau_{\max}}{r} \sum_0^r \Delta S \cdot \rho^2$$

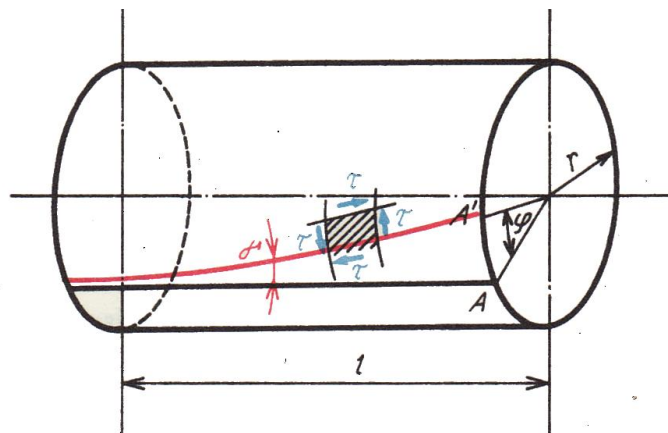
výraz pro součet je polární moment kruhového průřezu

$$M_k = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot J_p$$

rovnice pro napětí v krutu

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{J_p}{r}} = \frac{M_k}{W_k}$$

4. Krut kruhových průřezů, odvození rovnice pro úhel zkroucení



Z obrázku vyplývá deformační podmínka

$$AA' = r \cdot \varphi = l \cdot \gamma$$

Z Hookeova zákona pro smyk pak platí

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G}$$

Po dosazení za $\tau_{\max}$ je velikost zkroucení v obloukové míře

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Přitom $G \cdot J_p$ nazýváme **tuhostí v krutu**

5. Výpočtová rovnice pro namáhání krutem

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Pak velikost dovoleného napětí v krutu je přibližně:

Pro konstrukční oceli	$\tau_{Dk} = (0,6 \div 0,65)\sigma_{Dt}$
Pro pružinové oceli	$\tau_{Dk} = (0,7 \div 0,8)\sigma_{Dt}$
Pro litinu kruhový průřez	$\tau_{Dk} = \sigma_{Dt}$
Pro litinu mezikružní	$\tau_{Dk} = (0,8 \div 1,2)\sigma_{Dt}$
Pro litinu čtverec, obdélník	$\tau_{Dk} = (1,4 \div 1,6)\sigma_{Dt}$

6. Průřezové moduly v krutu základních profilů

Veličiny W_o a W_k jsou odvozeny z hodnot kvadratických a polárních momentů průřezu.

Pro průřezový modul v ohybu platí vztah:

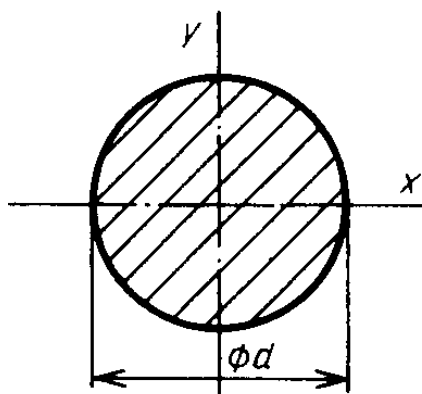
Pro průřezový modul v krutu

$$W_k = \frac{J_p}{e}$$

U krutu platí tento vztah jen pro kruhové průřezy. Pak tedy platí

$$W_k = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3$$

7. Kruhová plocha



8. Otázky a úkoly:

1. Kdy je prut namáhán krutem?
2. Co je neutrální osa.
3. Popiš všechny změny, které nastávají u zkrucovaného nosníku.
4. Co znamená pojem celkový úhel zkroucení.
5. Naznač postup, jak odvodíme základní výpočtovou rovnici pro namáhání krutem.
6. Jak je rozloženo tečné napětí po průřezu při namáhání kruhového průřezu krutem.
7. Jakou výhodu mají duté hřídele?
8. Naznačte postup pro odvození deformační rovnice při krutu.
9. Co je úhel zkroucení.
10. Definuj tuhost v krutu
11. Jaká jsou dovolená napětí v krutu pro ocel a litinu.
12. Porovnejte úsporu materiálu u plného a dutého hřídele stejné délky a stejného zatížení. $M_k = 5 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$, poměr průměrů $d/D = 0,7$, $\tau_{Dk} = 60 \text{ MPa}$

9. Použitá literatura

[1] Mrňák, I. Drdla, A. *Mechanika pružnost a pevnost I*. 1. Vydání SNTL, 1988
Kapitola 5.2. s.110

[8] Turek, I. Skala, O. Haluška, J. *Mechanika sbírka úloh*. 2. vydání Praha: SNTL, 1982.
1981. Kapitola 4 s.75