



**Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1**  
**Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT**

**Název: Mechanika, pružnost pevnost**

**Téma: Průřezové charakteristiky základních profilů.**

**Autor: Ing. Jaroslav Svoboda**

**Číslo: VY\_32\_INOVACE\_11–10**

**Anotace: Kvadratické a polární momenty průřezu a průřezové moduly v ohybu a krutu.**

**Určeno pro druhý ročník strojírenství 23-41-M/01.**

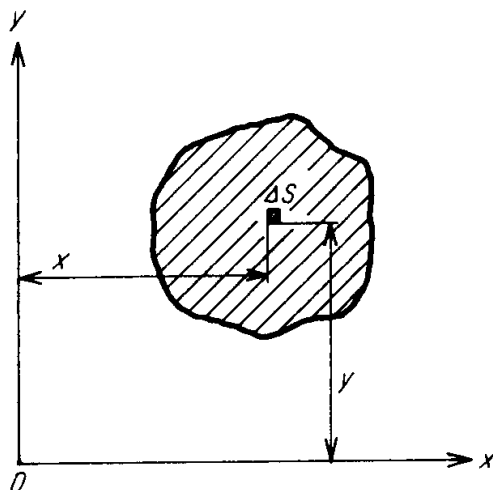
**Vytvořeno červen 2013**

# 1. Kvadratický moment průřezu

Tato veličina je charakteristickou průřezovou veličinou pro krut, ohyb a vzpěr. Označujeme ji  $J_x, J_y, J_z$ , podle osy ke, které kvadratický moment průřezu hledáme. Kvadratický moment průřezu můžeme matematicky vyjádřit vztahem

$$J_x = \sum \Delta S \cdot y^2$$

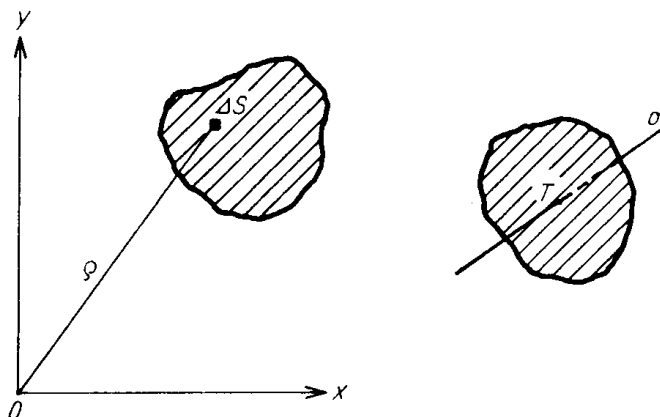
$$J_y = \sum \Delta S \cdot x^2$$



Uvedené vztahy pro kvadratický moment průřezu platí pro jakoukoli osu ležící v rovině průřezu. Součet součinů nekonečně malých plošek a druhých mocnin jejich vzdálenosti od této osy se vztahuje na celou plochu průřezu. Stejný průřez má podle polohy osy různou hodnotu kvadratického momentu průřezu. Protože druhé mocniny vzdálenosti elementů jsou vždy kladné, je kladná i hodnota  $J$

## 2. Kvadratický a polární moment průřezu

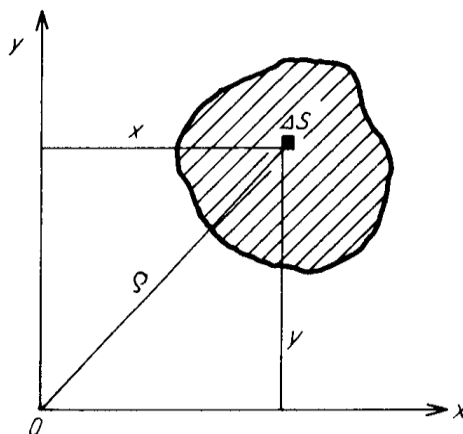
Kromě kvadratického momentu průřezu, který potřebujeme při výpočtu namáhání ohybem a vzpěrem používáme i polární moment průřezu  $J_p$ , který je vztažen k ose kolmé k rovině průřezu



Polární moment průřezu můžeme zjistit tak, že pól považujeme za průsečík dvou k sobě kolmých os, které leží v daném průřezu. Pak platí

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_p = \Sigma \Delta S \cdot \rho^2 = \Sigma \Delta S (x^2 + y^2) = \Sigma \Delta S \cdot x^2 + \Sigma \Delta S y^2 = J_x + J_y$$



Polární moment průřezu je dán vztahem

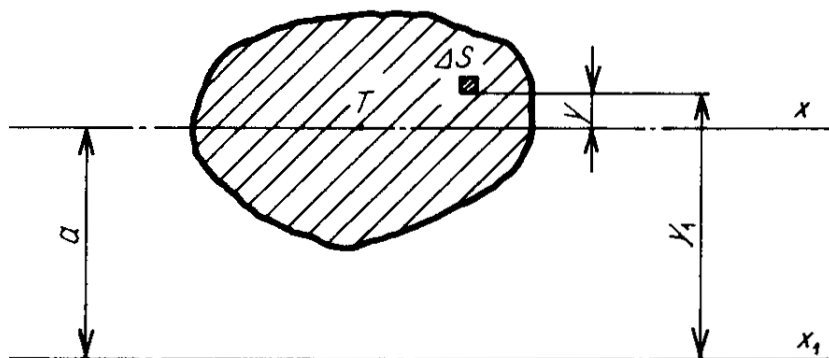
$$J_p = J_x + J_y$$

V zobecněné podobě jej můžeme definovat takto: polární moment průřezu je roven součtu dvou kvadratických momentů průřezu ke dvěma vzájemně kolmým osám, které se protínají v pólu

### 3. po

### 3. Steinerova věta

Osa, která prochází těžištěm, se nazývá *centrální osa* a příslušný kvadratický moment průřezu *centrální kvadratický moment průřezu*. Při některých výpočtech však potřebujeme znát kvadratický moment průřezu k jiné ose než centrální, která je však s centrální osou rovnoběžná.



Pak kvadratický moment průřezu k ose  $x_1$  je

$$J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot S$$

Tomuto vztahu říkáme Steinerova věta. Platí jen tehdy, když jedna z os je osou centrální a druhá je s ní rovnoběžná. Současně z ní plyne, že kvadratický moment k centrální ose je nejmenší ze všech kvadratických momentů daného průřezu.

- 4.** Má-li plocha nebo průřez osu souměrnosti, je tato osa vždy hlavní centrální osou. Druhá osa jde těžištěm a je k první kolmá. Má-li plocha více než dvě osy souměrnosti jsou všechny tyto osy hlavními centrálními osami a kvadratický moment průřezu je ke všem stejný. Hlavními centrálními osami nazýváme dvě osy k sobě kolmé a protínající se v těžišti průřezu

## 4. Průřezové moduly v ohybu a krutu základních profilů

Veličiny  $W_o$  a  $W_k$  jsou odvozeny z hodnot kvadratických a polárních momentů průřezu.

Pro průřezový modul v ohybu platí vztah:

$$W_o = \frac{J_x}{e}$$

Pro průřezový modul v krutu

$$W_k = \frac{J_p}{e}$$

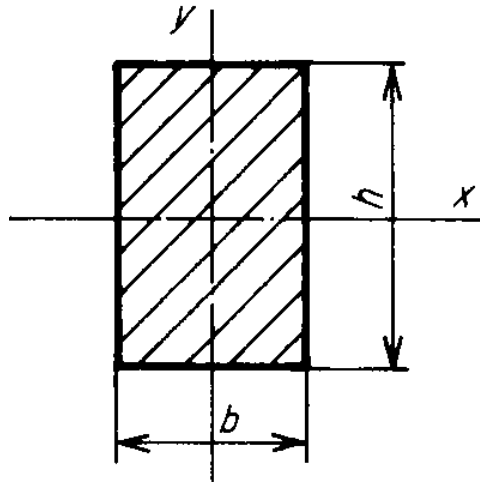
U krutu platí tento vztah jen pro kruhové průřezy. Pak tedy platí

$$W_k = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3$$

## 5. Obdélník

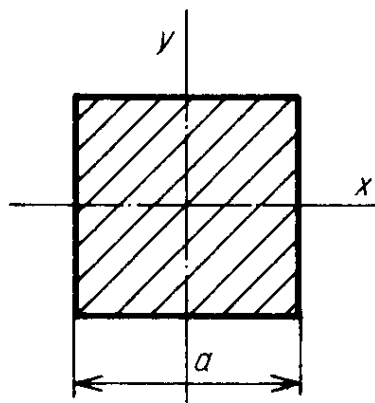
$$W_{ox} = \frac{J_x}{e} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W_{oy} = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$



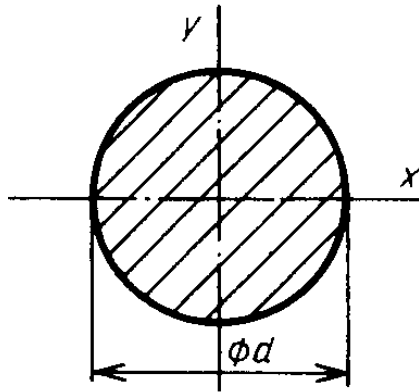
## 6. Čtverec

$$W_{ox,y} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$



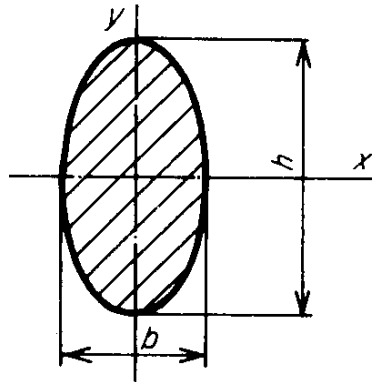
## 7. Kruhová plocha

$$W_{ox,y} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 0,1 \cdot d^3$$



## 8. Elipsa

$$W_{ox} = \frac{\pi \cdot b \cdot h^2}{32} = 0,1 \cdot b \cdot h^2$$
$$W_{oy} = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot h}{32} = 0,1 \cdot b^2 \cdot h$$

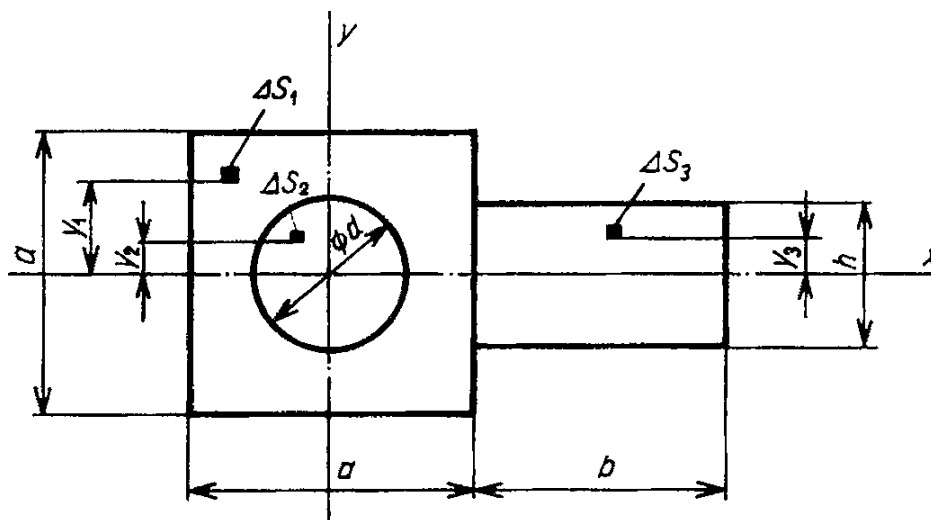


## 9. Výpočet kvadratických momentů průřezu a průřezových modulů obrazců složených

Kvadratické momenty průřezů lze slučovat tehdy a jen tehdy, jsou-li vztaženy ke společné ose.

U složených obrazců rozlišujeme dva základní případy:

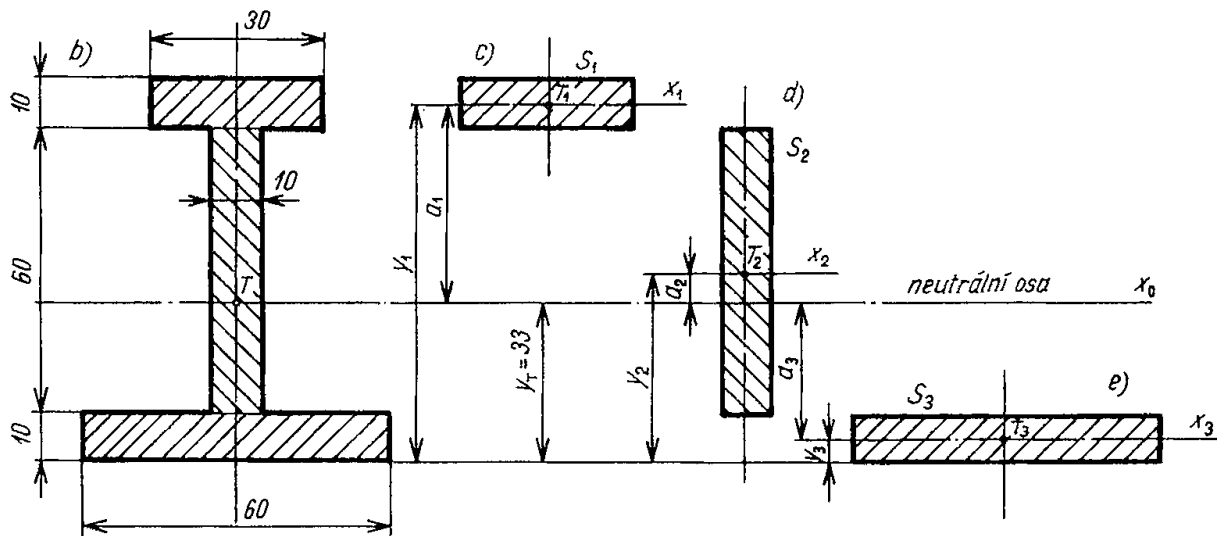
### 1. Dílčí plochy mají společnou osu souměrnosti



Součást rozdělíme na čtverec, kruh, obdélník. Kvadratický moment je součtem (pro otvor rozdílem) jednotlivých kvadratických momentů. Kvadratický moment průřezu celého obrazce k ose x je dán vztahem

$$J_x = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{b \cdot h^3}{6}$$

**2. Osa k níž počítáme kvadratický moment průřezu není osou souměrnosti dílčích ploch**



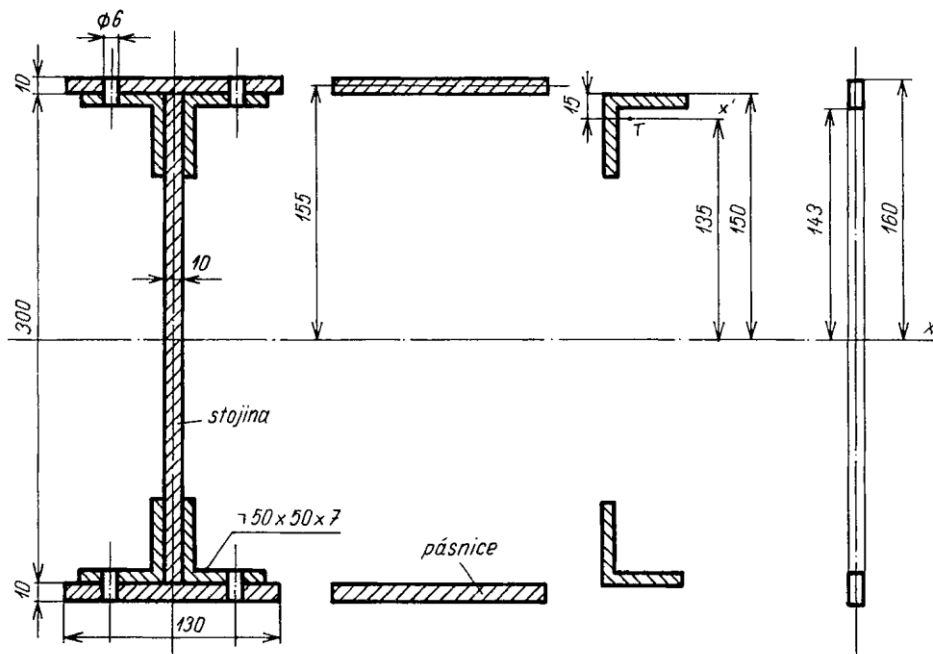
Postup řešení

- Určíme polohu těžiště průřezu
  - Rozdělíme na obrazce u nichž umíme zjistit kvadratické momenty průřezu
  - Tyto momenty určíme
  - Takto získané kvadratické momenty průřezu převedeme na centrální osu
- 3.** Nyní můžeme jednotlivé kvadratické momenty průřezu sloučit



## 9. Otázky a úkoly:

1. Co je to kvadratický moment průřezu.
2. Co je centrální osa.
3. Jaký je vztah mezi kvadratickým a polárním momentem průřezu kruhové plochy
4. Jak zní Steinerova věta, kdy ji lze použít.
5. Definuj průřezový modul v ohybu a krutu.
6. Čemu se rovná průřezový modul v krutu pro mezikružší.
7. Čemu se rovná průřezový modul v ohybu pro obdélník, čtverec a kruh.
8. Kdy můžeme kvadratické momenty slučovat?
9. Jak určujeme kvadratický moment složeného obrazce?
10. Určete kvadratický moment průřezu z předcházející strany.
11. Určete průřezové moduly pro předcházející případ.
12. Určete kvadratický moment průřezu složeného profilu.



## **10. Použitá literatura**

[1] Mrňák,I. Drdla,A. *Mechanika pružnost a pevnost I.* 1. Vydání SNTL, 1988  
Kapitola 4.1. s.88

[8] Turek,I. Skala,O. Haluška,J. *Mechanika sbírka úloh.* 2.vydání Praha: SNTL, 1982.  
1981.Kapitola 4 s.75