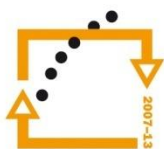




MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE
DO ROZVOJE
VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Téma: Funkce

Název: Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Autor: Ing. Vacková Věra

Číslo: VV_32_INOVACE_01 – 17

Anotace: *Prezentace je určena pro studenty středních průmyslových škol, obor strojírenství a technické lyceum. Probírané téma se týká vztahů mezi goniometrickými funkcemi. Jsou uvedeny základní vzorce pro goniometrické funkce, součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus, vzorce pro poloviční a dvojnásobný argument funkcí sinus a kosinus, vzorce pro součet a rozdíl hodnot funkcí sinus a kosinus a příklady jejich využití.*

Prosinec 2012

Základní vzorce pro goniometrické funkce

Pro každé reálné x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Pro každé reálné $x \neq k \cdot \pi/2$, k je celé číslo platí:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Úloha 1

Dokažte předchozí dvě tvrzení.

Nápověda: 1) použijte jednotkovou kružnici,
2) vyjádřete funkce tangens a kotangens pomocí sinus a kosinus

Úloha 2

Určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí:

$$\text{a) } \sin x = -\frac{1}{5}, x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$\text{b) } \tan x = 1, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Součtové vzorce

Pro každé reálné x, y platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Úloha 3

Dokažte následující tvrzení

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\text{c) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\text{d) } \cos(\pi + x) = -\cos x$$

Vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument

Pro každé reálné x platí:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Úloha 4

- a) Vyjádřete $\cos 3x$ pomocí $\cos x$.
- b) Vypočtete $\cos \pi/12$ pomocí vzorce pro poloviční argument.
- c) Vypočtete $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\cos x/2$, $\sin x/2$, $\operatorname{tg} x/2$
 $\cos x = -0,75$, x leží ve druhém kvadrantu.

Vzorce pro součet a rozdíl funkcí sinus a kosinus

Pro každé reálné x, y platí

$$\sin x + \sin y = 2\sin \left[\frac{(x + y)}{2} \right] \cdot \cos \frac{(x - y)}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos \left[\frac{(x + y)}{2} \right] \cdot \sin \frac{(x - y)}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos \left[\frac{(x + y)}{2} \right] \cdot \cos \frac{(x - y)}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin \left[\frac{(x + y)}{2} \right] \cdot \sin \frac{(x - y)}{2}$$

Úloha 5

a) Upravte do tvaru součinu:

$$\sin 3y + \sin y$$

b) Řešte rovnici:

$$\sin 3x + \sin 2x = \sin x$$

Zdroje

- Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1
- Odvárko, O. *Matematika pro gymnázie Goniometrie*, 4.vyd. Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-359-2
- Fuchs, E.,Kubát J. a kol. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*, 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0