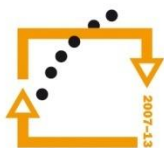




MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE
DO ROZVOJE
VZDĚLÁVÁNÍ

Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola technická Brno, Sokolská 1

Šablona: Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT

Téma: Funkce

Název: Funkce a její vlastnosti

Autor: Ing. Vacková Věra

Číslo: VY_32_INOVACE_01 – 01

Anotace: *Prezentace je určena pro studenty středních průmyslových škol, obor strojírenství a technické lyceum. Probírané téma se týká základních pojmů teorie funkce, definuje pojmy kartézský součin dvou množin, zobrazení a funkce. Dále jsou probrány pojmy definiční obor funkce, obor hodnot funkce, definován graf funkce, způsoby zadávání funkcí, vlastnosti funkcí (parita, omezenost, monotónnost, periodicitu).*

Červenec 2012

Funkce

- Jeden z nejdůležitějších matematických pojmů.
- Vychází z pojmů kartézský součin a zobrazení.
- Určuje, jakým způsobem jsou prvkům libovolné množiny A přiřazována čísla z číselné množiny B .

Kartézský součin množin A a B

Kartézský součin množin A a B

je množina *všech uspořádaných dvojic*,
ve kterých je první složka dvojice z množiny A a
druhá z množiny B .

Příklad 1: Určete kartézský součin množin A a B

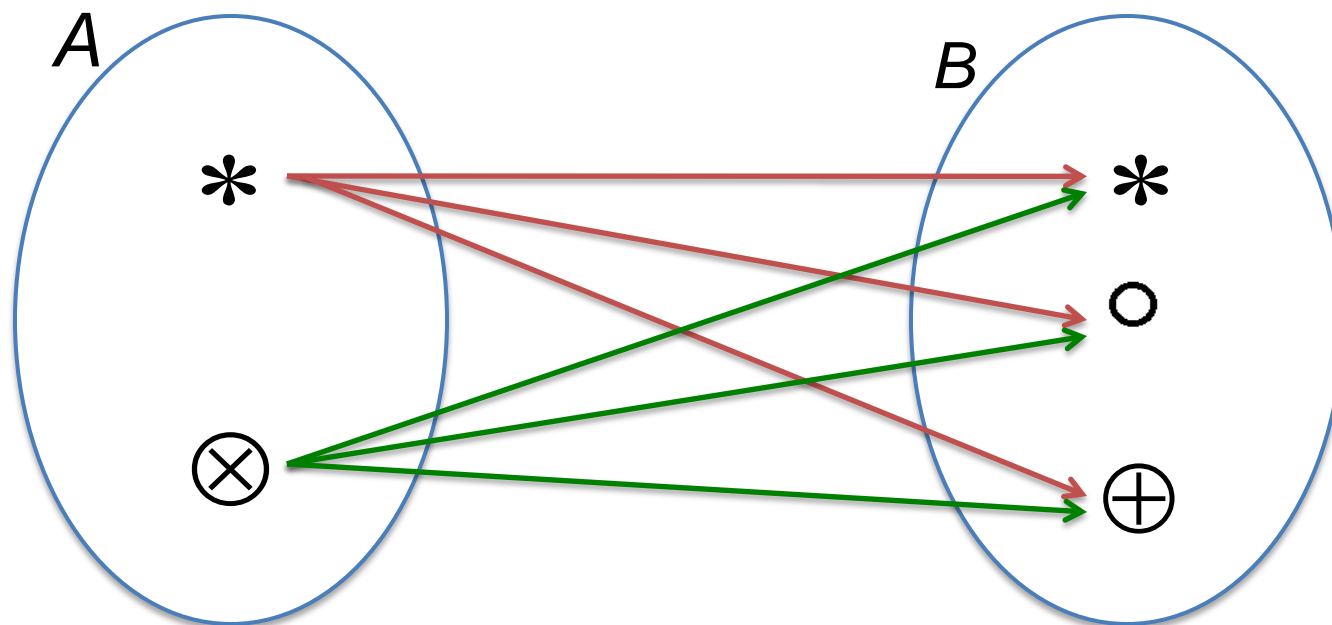
$$A = \{*, \otimes\} \quad B = \{*, \circ, \oplus\}$$

Řešení: prvky množiny řešení jsou uspořádané dvojice

$$[* , *]; [* , \circ]; [* , \oplus]; [\otimes , *]; [\otimes , \circ]; [\otimes , \oplus]$$

Kartézský součin množin A a B

Konstrukce uspořádaných dvojic



René Descartes (Cartesius) obr.2



francouzský filosof,
matematik a fyzik

zakladatel analytické
geometrie

“Cogito ergo sum.”
(Myslím, tedy jsem.)

Zobrazení z množiny A do množiny B

Zobrazení je podmnožinou kartézského součinu dvou množin A a B , ve které je prvku z množiny A ***jednoznačně*** přiřazen prvek z množiny B .

Příklad 2: Určete zobrazení, které je podmnožinou kartézského součinu množin A a B z příkladu 1.

Pozn.: Podmínka jednoznačnosti přiřazení určuje tuto podmnožinu

Řešení vychází z kartézského součinu:

$$A = \{*, \otimes\} \quad B = \{*, \circ, \oplus\}$$

Kartézský součin:

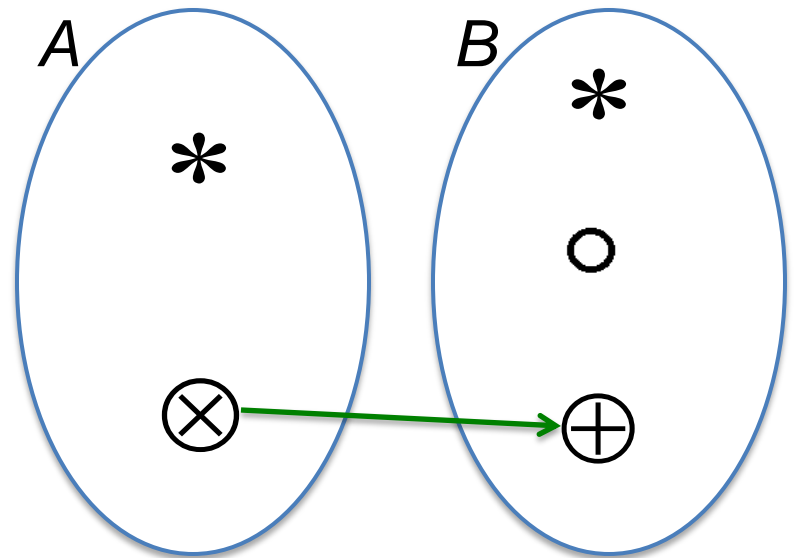
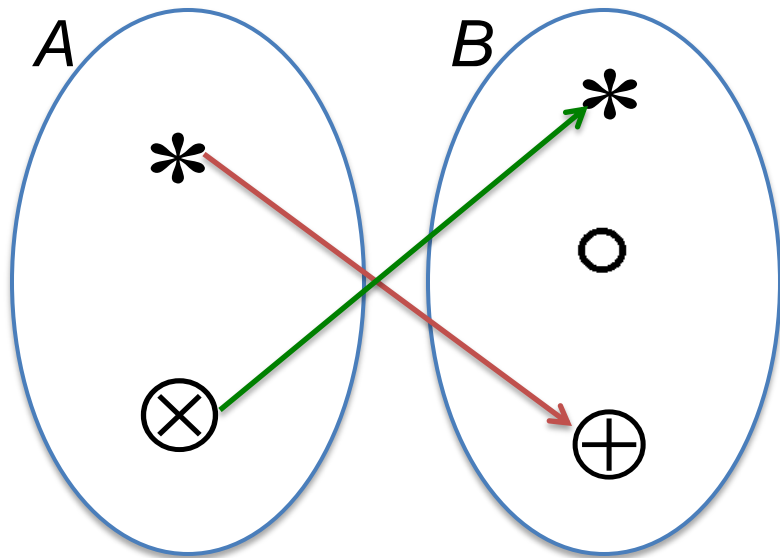
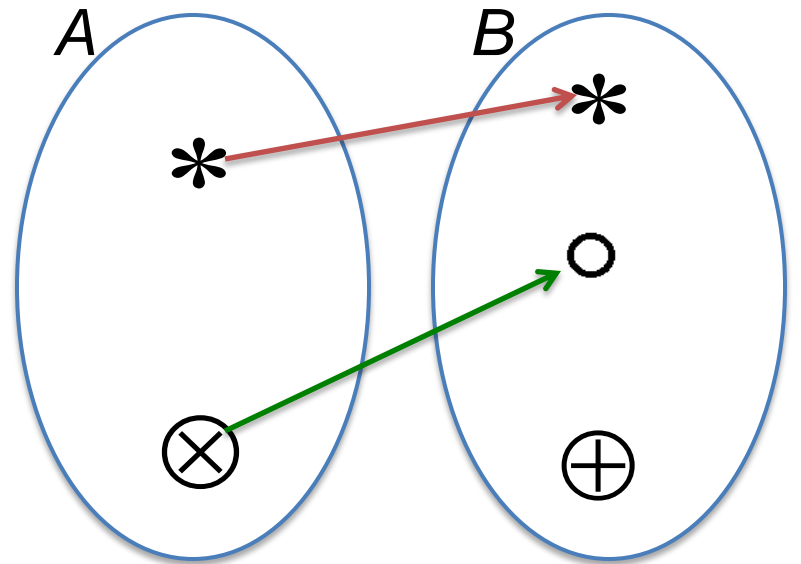
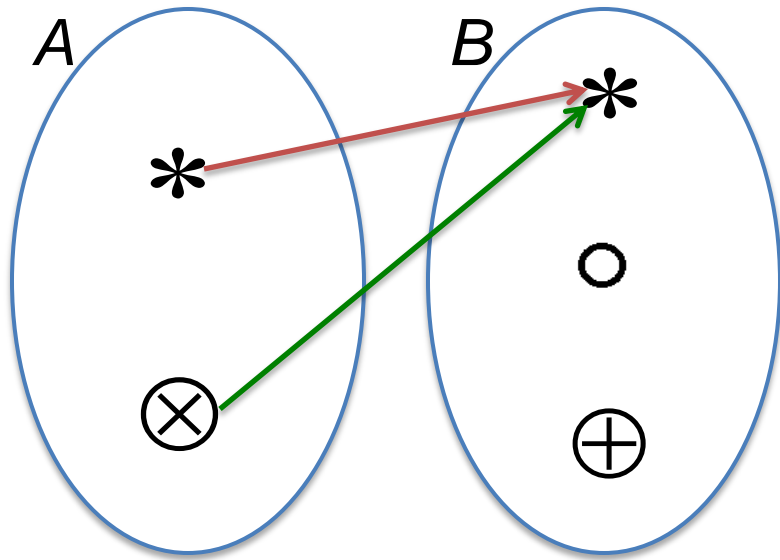
$$[* , *]; [* , \circ]; [* , \oplus]; [\otimes , *]; [\otimes , \circ]; [\otimes , \oplus]$$

Zobrazení:

různé podmnožiny splňující podmínku jednoznačnosti přiřazení

$$[* , *]; [\otimes , *] \text{ nebo } [* , *]; [\otimes , \circ] \text{ nebo } [* , \oplus]; [\otimes , *]$$

nebo $[\otimes , \oplus]$ a další



Obr.3

Úloha 1

Nalezněte další zobrazení a načrtněte pomocí šipek tvorbu jednotlivých uspořádaných dvojic.

Funkce

Funkce je *zobrazení* z libovolné množiny A do *číselné množiny* B .

Reálná funkce reálné proměnné je zobrazení z neprázdné množiny A podmnožiny množiny reálných čísel do neprázdné množiny B podmnožiny množiny reálných čísel.

Značení funkce:

malými písmeny latinské abecedy f, g, h, \dots
nebo dohodnutými zkratkami \sin, \log, \dots

Funkce – definiční obor funkce f

Libovolný prvek $x \in A$ se nazývá funkční proměnná x , zkráceně proměnná, nebo argument funkce f .

Definiční obor funkce f je množina všech hodnot proměnné x .

Značení:

$D(f)$ nebo D_f

Úloha 2

Určete definiční obory funkcí:

$$f: y = 2x + 7$$

$$g: y = \frac{1}{x}$$

$$h: y = \sqrt{x - 3}$$

Funkce – obor hodnot funkce f

Číslo $y \in B$ přiřazené číslu x se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce f v bodě x** .

Píšeme: $y = f(x)$ nebo $x \rightarrow f(x)$

Množina všech hodnot funkce f se nazývá **obor hodnot funkce f** . (obor funkčních hodnot)

Značení:

$H(f)$ nebo H_f

Funkce – graf funkce f

Grafem funkce f v kartézské soustavě souřadné je množina všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$.

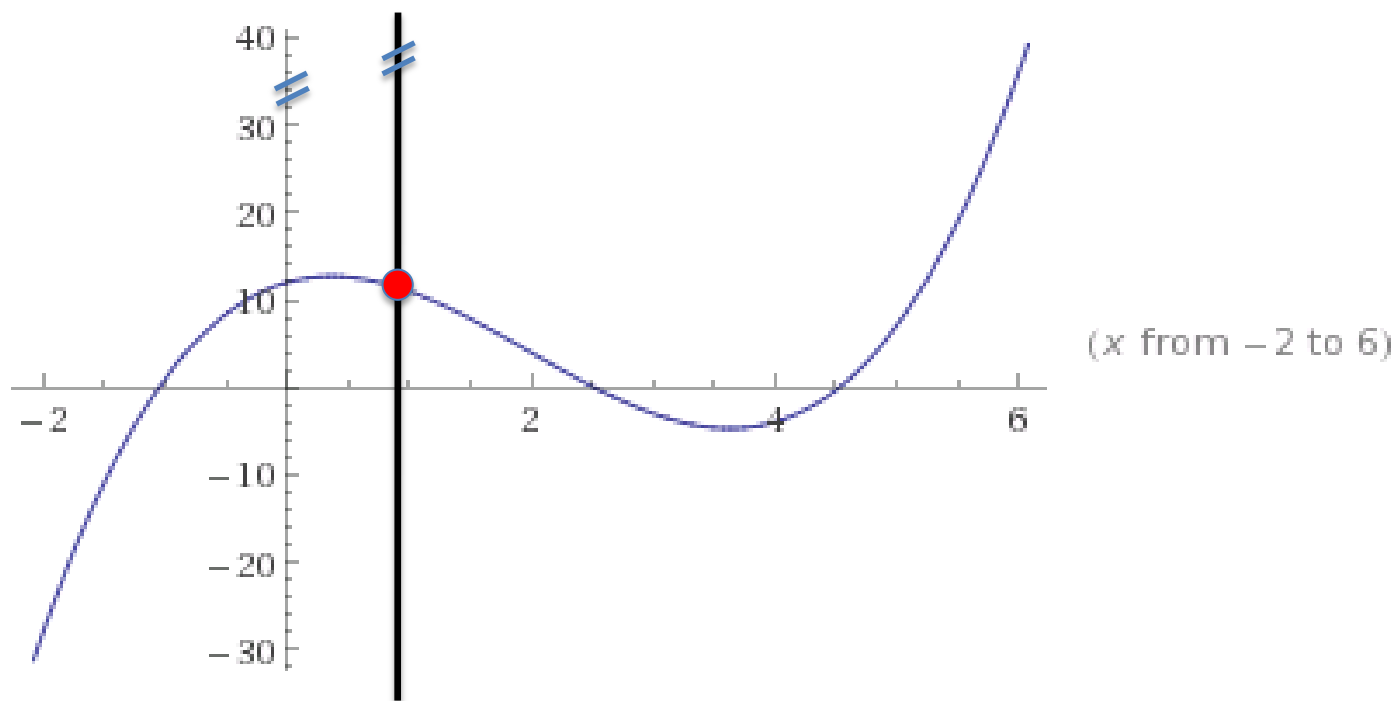
Na vodorovnou osu pravoúhlé soustavy souřadné vynášíme proměnnou x , na svislou osu funkční hodnoty $y = f(x)$.

Je-li definiční obor funkce f tvořen množinou s nekonečně mnoha prvky, bývá grafem funkce f rovinná křivka.

Každá přímka rovnoběžná s osou y má s grafem libovolné funkce nejvýše jeden společný bod.

Funkce – graf funkce f

Na obrázku je graf funkce $y = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$:



Obr.4

Funkce – její zadávání

K jednoznačnému určení funkce je třeba znát definiční obor $D(f)$ a funkční předpis.

Funkční předpis je pravidlo, podle kterého je každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena funkční hodnota $y = f(x)$.

Funkce – její zadávání

Způsoby zadání *funkčního předpisu* funkce:

1. **Analytické zadání** – funkční předpis je *rovnice* typu $y = f(x)$, např. $y = \sin x$.
2. **Grafické zadání** – funkční předpis je *graf* funkce
3. **Zadání tabulkou** – funkční předpis je *tabulka* uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$, definiční obor takto zadaných funkcí je konečná množina, např.

x	-1	0	4	6	10	12
$y = f(x)$	1	0	16	36	100	144

Rovnost funkcí

Dvě funkce f a g jsou si **rovny** ($f = g$), jestliže se rovnají jejich definiční obory $D(f) = D(g)$ a pro všechny body $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Příklad 3: Určete, zda jsou si rovny funkce:

1. $f: y = x;$ $g: y = |x|$

2. $f: y = x^2;$ $g: y = |x|^2$

3. $f: y = x;$ $g: y = \frac{x^2}{x}$

Řešení:

1. *ne*,

není splněna podmínka rovnosti funkčních hodnot,

2. *ano*,

3. *ne*,

nerovnájí se definiční obory

$$D(f) = \mathbf{R}, D(g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Algebraické operace s funkcemi

Podmínkou proveditelnosti algebraických operací s funkcemi je neprázdný průnik D definičních oborů funkcí. Je-li tato podmínka splněna definujeme součet funkcí f a g ($f + g$) tak, že každému číslu x z jejich společného průniku D přiřadíme číslo

$$f(x) + g(x).$$

Obdobně se definuje

rozdíl $f - g$,

součin $f \cdot g$,

podíl f/g ,

kde $g(x)$ je různé nuly pro všechna x z D .

Funkce – vlastnosti funkcí

Parita funkce – funkce sudá, funkce lichá

Monotónnost funkce – funkce rostoucí, klesající,
nerostoucí, neklesající

Omezenost funkce – funkce omezená, zdola omezená,
shora omezená

Periodická funkce

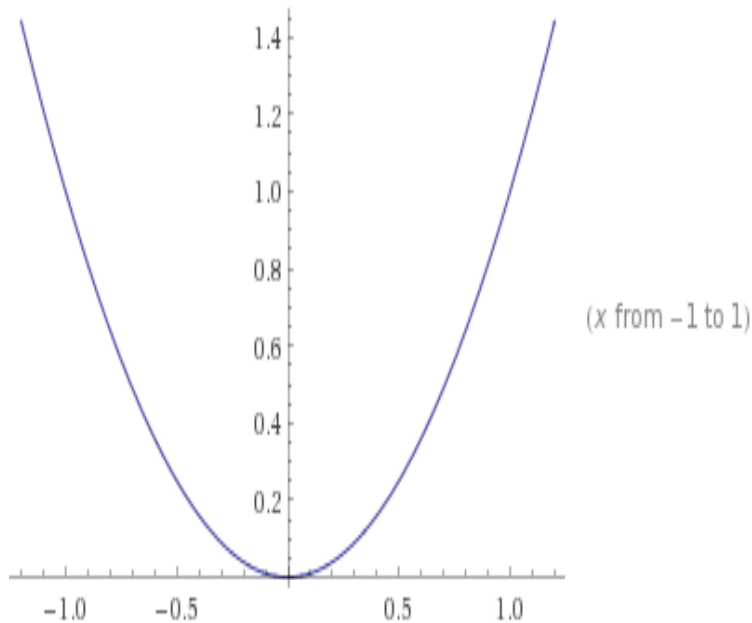
Sudá funkce, lichá funkce

Je dána funkce f s definičním oborem $D(f)$ taková, že platí: $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$.

Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

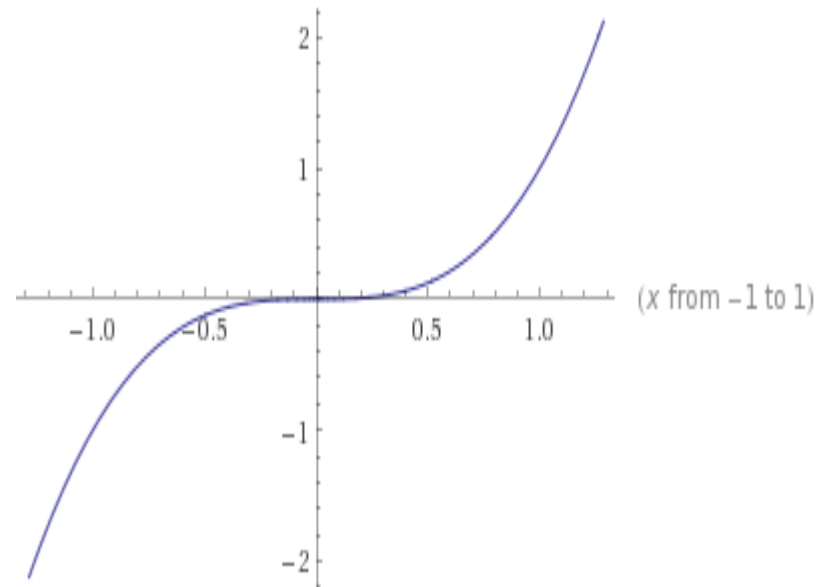
Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Sudá funkce, lichá funkce - grafy



Obr.5

Sudá funkce –
*graf osově souměrný
podle osy y*



Obr.6

Lichá funkce –
*graf středově souměrný
podle počátku*

Úloha 3

Zakreslete další grafy sudých a lichých funkcí

Monotónnost funkce

Nechť funkce f je definována na množině $A \subseteq D(f)$, říkáme, že

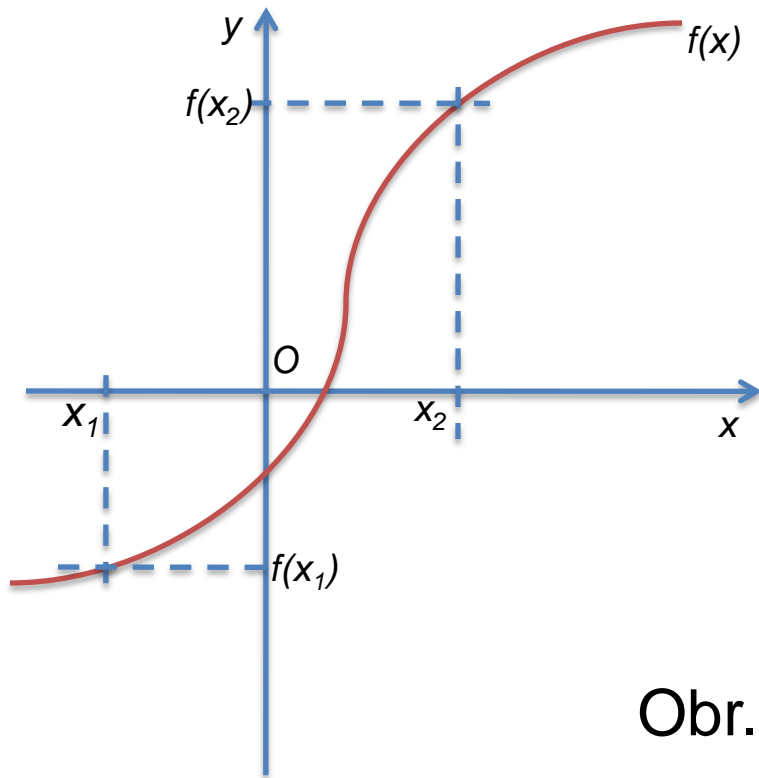
funkce f je na množině A **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;

funkce f je na množině A **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$;

funkce f je na množině A **neklesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;

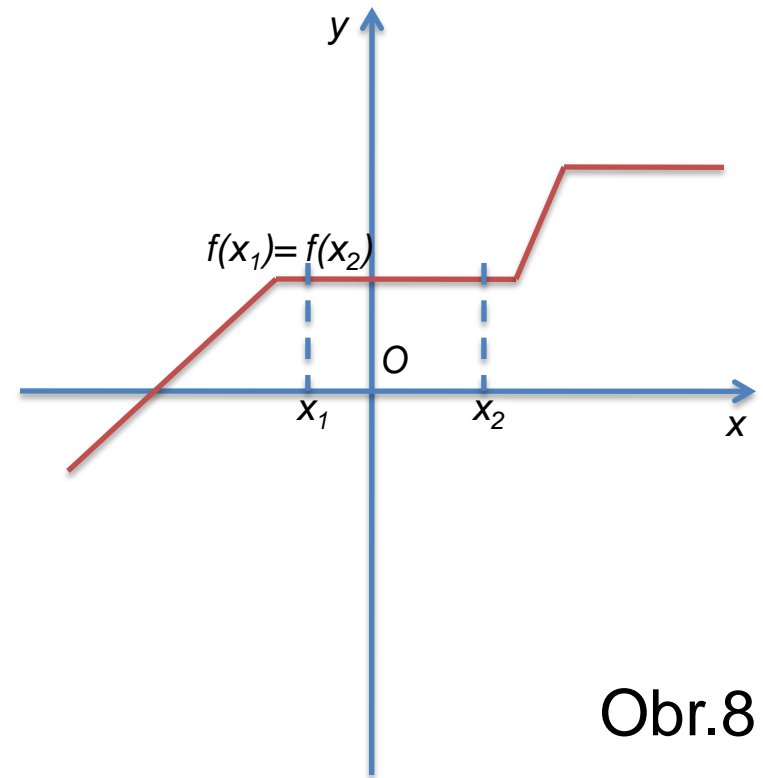
funkce f je na množině A **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Monotónnost funkce - grafy



Obr.7

Rostoucí funkce



Obr.8

Neklesající funkce

Úloha 4

Zakreslete grafy libovolné rostoucí, klesající, neklesající a nerostoucí funkce

Omezenost funkce

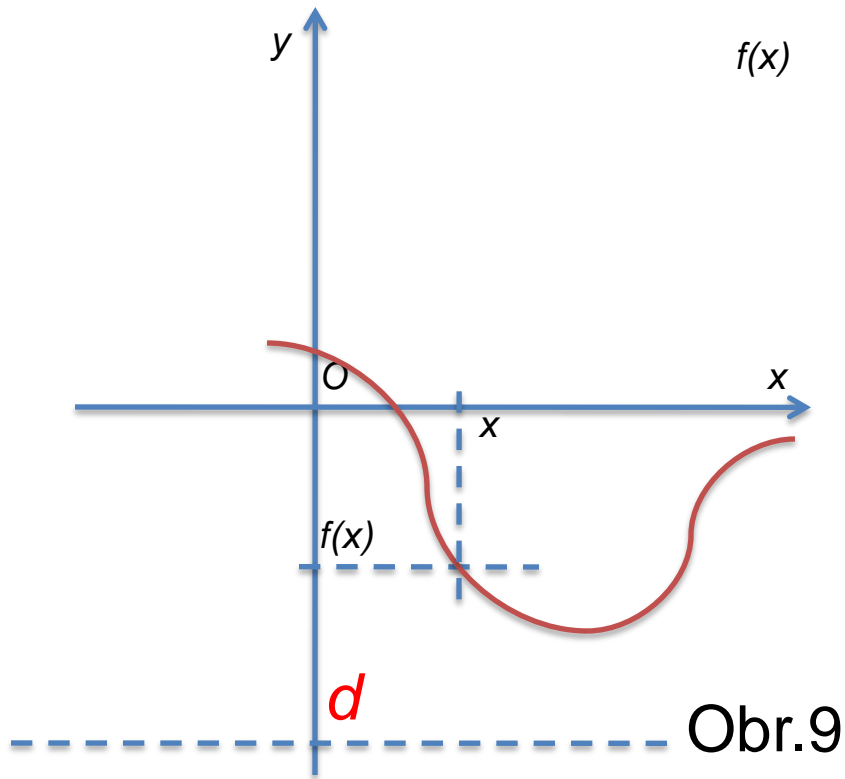
Necht' funkce f je definována na množině $A \subseteq D(f)$, říkáme, že

funkce f je na množině A **zdola omezená**, právě když existuje takové číslo $d \in \mathbf{R}$, že pro všechna $x \in A$ platí $f(x) \geq d$;

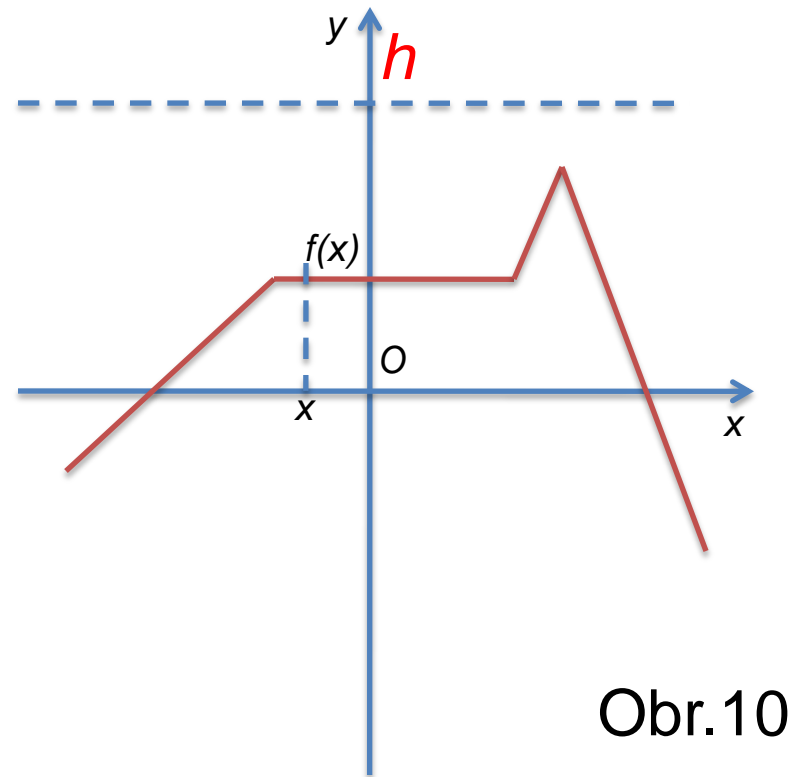
funkce f je na množině A **shora omezená**, právě když existuje takové číslo $h \in \mathbf{R}$, že pro všechna $x \in A$ platí $f(x) \leq h$;

funkce f je na množině A **omezená**, právě když je na A omezená zdola i shora.

Omezenost funkce - grafy



Zdola omezená funkce

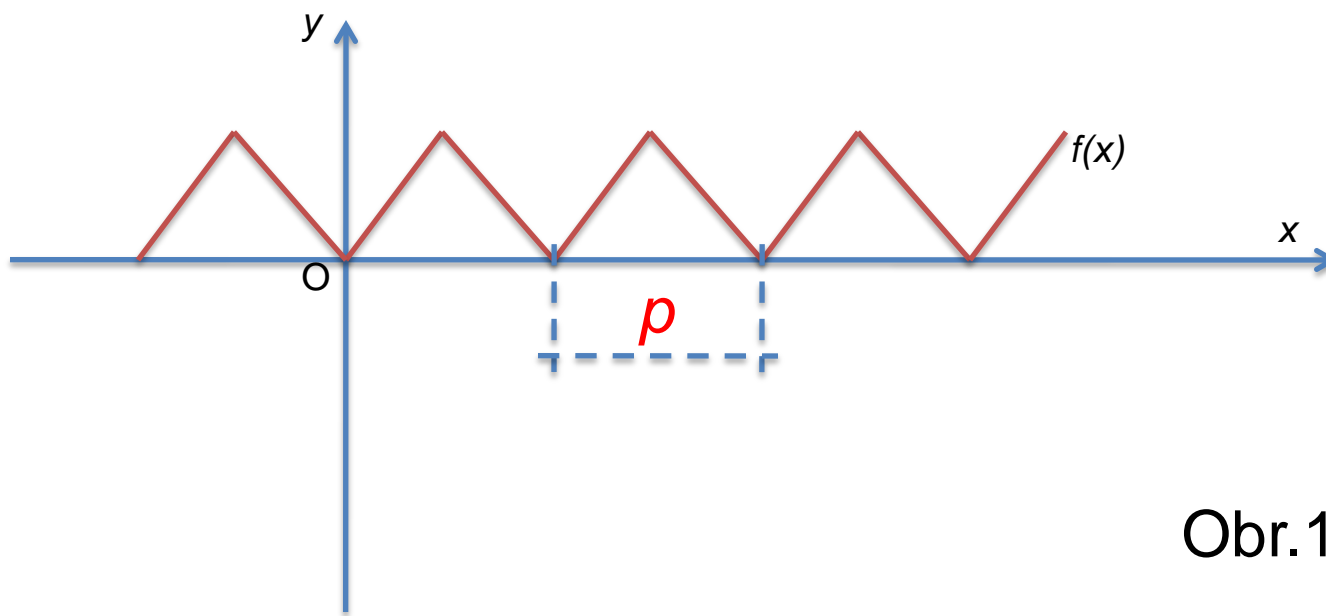


Shora omezená funkce

Periodická funkce

Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p > 0$ (**perioda funkce**), že pro každé celé číslo k platí:

1. Je-li $x \in D(f)$, pak také $(x + kp) \in D(f)$;
2. Pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(x + kp)$.



Obr.11

Úloha 5

Zakreslete graf libovolné omezené funkce.

Zakreslete graf libovolné periodické funkce.

Zdroje

- Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1
- Vošický, Z. *Matematika v kostce pro střední školy*. 2. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 1999. ISBN 80-7200-333-X

- Obr.1 [cit. 12-25-8] Dostupné pod licenci Public domain na WWW.
- [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans Hals – Portret van René Descartes.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg)

- Obrázky 1, 3, 7, 8, 9, 10, 11 byly vytvořeny pomocí PowerPoint 2008 for Mac
- Obrázky 4, 5, 6 byly vytvořeny pomocí Wolfram|Alpha